Disequazioni e sistemi di disequazioni

prof. Andres Manzini

Università degli studi di Modena e Reggio Emilia
Dipartimento di Scienze e Metodi dell'Ingegneria
Corso MOOC "Iscriversi a Ingegneria Reggio Emilia"

Disuguaglianze fra numeri reali

Presi due numeri $a, b \in \mathbb{R}$, si verifica sempre una delle seguenti relazioni:

$$a < b \qquad a = b \qquad a > b$$

La scrittura $a \geq b$ va intesa come vera se $a > b$ oppure $a = b$.

- $2 \geq 2 \longrightarrow \boxed{V}$
- $2 > 2 \longrightarrow \boxed{F}$

Proprietà delle disuguaglianze

- $a > b \longrightarrow a + c > b + c, \qquad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$
- $a > b, c > 0 \longrightarrow ac > bc, \dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c} \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}$
- $a > b, c < 0 \longrightarrow ac < bc, \dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c} \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}$

Disequazione

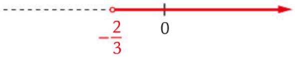
Una **disequazione** è una disuguaglianza fra due membri, di cui almeno uno contiene un'incognita. **Risolvere una disequazione** significa determinare i valori dell'incognita per i quali la disuguaglianza è vera.

Le disequazioni

- si classificano in base al grado: $3x + 2 \leq -5x, x^2 - 3x > 0 \dots$
- si definiscono **fratte** se l'incognita compare al denominatore: $\dfrac{2x+5}{x^2-9} \geq 2$
- si definiscono **irrazionali** se l'incognita compare sotto il segno di radice: $\sqrt{3x-2} > x + 5$

Importante classificare correttamente la disequazione!

Soluzione di una disequazione

Disequazione	Insieme delle soluzioni	Rappresentazione sulla retta reale
$x \leq 3$	$S = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 3\}$ ovvero l'insieme dei numeri reali minori o uguali a 3	
$x > -\frac{2}{3}$	$S = \left\{x \in \mathbf{R} \mid x > -\frac{2}{3}\right\}$ ovvero l'insieme dei numeri reali maggiori di $-\frac{2}{3}$	

In generale la soluzione di una disequazioni si può esprimere come intervallo reale $S : (-\infty, 3]$ oppure $S : (-\frac{2}{3}, +\infty)$.
Le disequazioni possono essere anche

- impossibili $S : \varnothing$,
- sempre verificate $S : \mathbb{R}$.

NB Usando le proprietà delle disequazioni si può sempre ricondurre la disequazione alla forma

$$f(x) > 0 \qquad f(x) \geq 0 \qquad f(x) < 0 \qquad f(x) \leq 0$$

Disequazioni di primo grado. Si presentano nella forma $ax + b > 0$ (o forme analoghe...)

- $ax + b > 0 \longrightarrow x > -\dfrac{b}{a}$ se $a > 0$
- $ax + b > 0 \longrightarrow x < -\dfrac{b}{a}$ se $a < 0$

Esempi:

- $3x + 1 > 0 \longrightarrow x > -\dfrac{1}{3}$
- $3x \leq 7x \longrightarrow -4x \leq 0 \longrightarrow x \geq 0$
- $\dfrac{x}{(1-\sqrt{2})} > 3 \longrightarrow x < 3(1-\sqrt{2})$

Disequazioni fratte

Occorre ricondurre la disequazione nella forma

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \qquad \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \qquad \frac{f(x)}{g(x)} < 0 \qquad \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$$

La tecnica risolutiva generale prevede lo studio del segno della frazione attraverso lo studio dei segni di numeratore e denominatore.

Esempio:

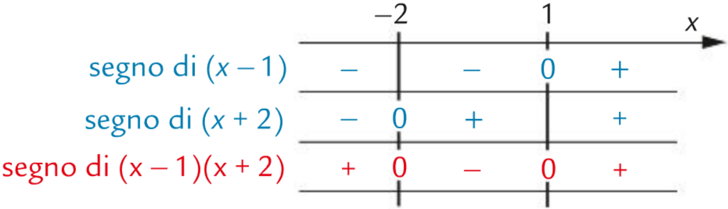
$$\frac{2x+1}{x-1} \leq 0$$

x		$-\frac{1}{2}$		1	
segno di $(2x+1)$	$-$	0	$+$		$+$
segno di $(x-1)$	$-$		$-$	0	$+$
segno di $\frac{2x+1}{x-1}$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$

Esempi

$$x^2 + x - 2 > 0$$

La disequazione è equivalente a $(x-1)(x+2) > 0$.



$$S : (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$$

Disequazioni di secondo grado

Si presentano nella forma canonica

$$ax^2+bx+c > 0 \quad ax^2+bx+c \geq 0 \quad ax^2+bx+c < 0 \quad ax^2+bx+c \leq 0$$

- Risoluzione mediante scomposizione
  - $x^2 - 2x \geq 0$ raccoglimento a fattor comune
  - $x^2 - 4x + 4 > 0$ quadrato di binomio
- Risoluzione mediante equazione associata $ax^2 + bx + c = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Risoluzione grafica (metodo della parabola associata)

Metodo dell'equazione associata

$$ax^2+bx+c > 0 \quad ax^2+bx+c \geq 0 \quad ax^2+bx+c < 0 \quad ax^2+bx+c \leq 0$$

- Si riporta la disequazione nella forma canonica.
- Si determinano il numero delle soluzioni dell'equazione associata, che dipendono dal segno del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$
- Si determina la soluzione della disequazione in base al numero di soluzioni dell'equazione e in base al segno del coefficiente a e il verso della disequazione.
    - $x^2 - 4x + 3 \geq 0 \longrightarrow x = 1, x = 3$
    $$S : (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$$
    - $x^2 - 5 < 0 \longrightarrow x = \pm\sqrt{5}$
    $$S : (-\sqrt{5}, +\sqrt{5})$$

Metodo dell'equazione associata

- $x^2 + 3x + 5 \geq 0 \longrightarrow \Delta < 0$

$$S : (-\infty, +\infty)$$

- $x^2 + x + 15 < 0 \longrightarrow \Delta < 0$

$$S : \varnothing$$

Se nell'equazione associata $\Delta = 0$ allora il trinomio di secondo grado è lo sviluppo di un quadrato di binomio.

- $x^2 - 6x + 9 \geq 0 \longrightarrow \Delta = 0 \longrightarrow (x-3)^2 \geq 0 \longrightarrow S : (-\infty, +\infty)$
- $x^2 - 6x + 9 > 0 \longrightarrow S : (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$
- $x^2 - 6x + 9 < 0 \longrightarrow S : \varnothing$
- $x^2 - 6x + 9 \leq 0 \longrightarrow S : \{3\}$

Sistemi di disequazioni

Sistema di disequazioni: insieme di due o più disequazioni, tutte nella stessa incognita, che si vuole siano soddisfatte **contemporaneamente**.

$$\begin{cases} x^2 \geq x \\ \\ \sqrt{2} > 2(x+1) \end{cases}$$

Siano $S_1, S_2, \ldots, S_n$ le soluzioni delle n disequazioni che costituiscono il sistema, allora la soluzione del sistema sarà

$$S : S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n$$

$$\begin{cases} 2-(5-x)\leq 1 \\ (x-1)^2 \geq (x+1)^2 \\ \frac{1}{3}x > 2x+5 \end{cases}$$

Risolvendo le singole disequazioni si ottiene

$$\begin{cases} x \leq 4 \\ x \leq 0 \\ x < -3 \end{cases}$$